**2.4 ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ**

 **ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ**

 **Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 248 – 251**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο

του διπλανού σχήματος

 = = 

**Προτεινόμενη λύση**

Είναι φανερό ότι η άγνωστη γωνία του τριγώνου

έχει μέτρο 180ο – 30ο – 80ο = 70ο

Oπότε  = = 

**2.**

Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων

**α)** Στο τρίγωνο ΑΒΔ

**β)** Στο τρίγωνο ΑΔΓ

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι  = 180ο –70ο –30ο = 80ο

Οπότε  = = 

**β)**

Είναι ΑΓ = 180ο – 70ο = 110ο

Στο τρίγωνο ΑΔΓ είναι  = 180ο– 20ο – 110ο = 50ο

Οπότε  = = 

**3.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες .

**α)** Σε κάθε τρίγωνο ισχύει αημΒ = βημΑ (Σ)

**β)** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι = 60ο  και = 100ο ,

 τότε  =  (Λ)

**γ)** Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει 2βγσυνΑ = β2 + γ2 α2  (Σ)

**δ)** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι = 70ο  και = 80ο ,

 τότε ισχύει β2 = γ2 + α2 2γασυν 80ο (Λ)

**ε)** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι = 60ο, τότε ισχύει γ2 = α2 + β2 αβ (Σ)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**  =  άρα αημΒ = β ημΑ . Πρόταση (Σ)

**β)** Είναι φανερό ότι = 20ο , άρα = = . Πρόταση (Λ)

**γ)** α2 = β2 + γ2 2βγ συνΑ άρα 2βγσυνΑ = β2 + γ2 α2  Πρόταση (Σ)

**δ)** Είναι φανερό ότι = 30ο, άρα β2 = γ2 + α2 2γασυν 80ο Πρόταση (Λ)

**ε)** γ2 = α2 + β2 2αβσυνΓ = α2 + β2 2αβσυν60ο =

 = α2 + β2 2αβ=

 = α2 + β2 αβ Πρόταση (Σ)

**4.**

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα

με τον νόμο των συνημιτόνων.

x2 = ……. y2 = …… ω2 = ……

**Απάντηση**

Η άγνωστη γωνία του τριγώνου είναι 180ο75ο – 60 = 45ο

x2 = y2 + ω2 2yω συν75ο

y2 = x2 + ω2 2xω συν60ο

ω2 = y2 + x2 2yx συν45ο

**5.**

****Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις

**α)** Η γωνία x υπολογίζεται με τον νόμο των

 ημιτόνων, από την ισότητα  = .



**β)** Η πλευρά x υπολογίζεται με τον νόμο των

 συνημιτόνων, από την ισότητα

 x2 = 52 + 42 2⋅4⋅5συν50ο

x

4

5

6

**γ)** Η γωνία x υπολογίζεται με τον νόμο των

 συνημιτόνων , από την ισότητα

 62 = 52 + 42 2⋅4⋅5συνx



**δ)** Η πλευρά x υπολογίζεται με τον νόμο των

 ημιτόνων, από την ισότητα  = 

**Ασκήσεις**

**1.**

Να υπολογίσετε το x σε κάθε μία από τις περιπτώσεις



**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

=  άρα (ημ45ο) x = 4ημ30ο

  x = 4

  x = 4

 x =  =  = 2

**β)**

=  άρα (ημ120ο) x = 15ημ45ο (ημ120ο = ημ60ο παρ/κές)

 (ημ60ο) x = 15ημ45ο

  x = 15

  x = 15

 x =  =  =  = 5

**γ)**

Η άγνωστη γωνία του τριγώνου είναι 180ο75ο – 45o = 60ο

 = άρα (ημ45ο) x = 8ημ60ο

  x = 8

  x = 8

 x =  =  =  = 4

**2.**

****Να υπολογίσετε το x σε κάθε μία από τις περιπτώσεις

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

=  άρα 4ημx = 8ημ30ο

 ημx = 2

 ημx = 1 οπότε x = 90o

**β)**

=  άρα 5ημx = 5ημ120ο (αλλά ημ120ο = ημ60ο = )

 5 ημx = 5

 ημx =

 x = 30o ή x = 150ο

Η τιμή x = 150o απορρίπτεται αφού ήδη μία γωνία του τριγώνου είναι 120ο αμβλεία.

**γ)**

=  άρα 3ημx = 6ημ60ο

 3ημx = 6

 ημx = 1 άρα x = 90ο

**3.**

Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ όταν

**α)** α = 2 , β =  και = 30ο **β)** β =  , γ =  και = 60ο

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 =  άρα  = 

 ημΑ = 2ημ30ο

 ημΑ = 2

 ημΑ = οπότε  = 45ο ή  = 135ο

 Για  = 45ο , θα είναι  = 180ο 3045ο = 105ο

 Για  = 135ο , θα είναι  = 180ο 30135ο = 15ο

**β)**

 =  άρα  = 

 ημΒ = ημ60ο

 ημΒ = 

 ημΒ = , οπότε  = 45ο ή  = 135ο

 Η τιμή  = 135ο απορρίπτεται, διότι τότε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου θα ήταν μεγαλύτερο από 180ο

Αφού  = 45ο  και = 60ο , θα είναι = 75ο

**4.**

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι = 30ο , β = 10 , α = 10, τότε να αποδείξετε ότι το

τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές .

**Προτεινόμενη λύση**

 =  άρα 10ημΑ = 10ημ30ο

 ημΑ = 

 ημΑ =  άρα  = 60ο ή  = 120ο

 Για  = 60ο , θα είναι = 180ο3060 = 90ο οπότε το τρίγωνο είναι

 ορθογώνιο

 Για  = 120ο , θα είναι = 180ο30120 = 30ο , οπότε = , συνεπώς

 το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**5.**

Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής

x του εναέριου σιδηρόδρομου στο

διπλανό σχήμα.

(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς

πίνακες )

**Προτεινόμενη λύση**

Είναι = 180ο 130ο 30ο = 20ο

από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε

 =  άρα  =  (ημ130ο = ημ50ο, από παρ/κές γωνίες)

 xημ20ο = 200ημ50ο

 0,342 x = 200⋅0,766 άρα x = 448m περίπου

**6.**

Ένας μαθητής απευθυνόμενος στον καθηγητή των Μαθηματικών είπε :

Κύριε σε ένα βιβλίο βρήκα μια άσκηση στην οποία έδινε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με

α = 12 , β = 6 και = 60ο , και ζητούσε να βρεθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου . Πώς λύνεται;

Ο καθηγητής αφού είδε την άσκηση του είπε :

Κάποιο λάθος έχεις κάνει , γιατί δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο

Πώς το κατάλαβε ο καθηγητής ;

**Προτεινόμενη λύση**

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε  =  άρα  = 

 6ημΑ = 12ημ60ο

 ημΑ = 2

 ημΑ =  > 1 άτοπο

**7.**

Οι δυνάμεις F1 , F2 έχουν συνισταμένη F = 10 N,

που σχηματίζει με την F1 γωνία 28ο και με την

F2 γωνία 35ο .

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις F1 και F2 .

(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες )

**Προτεινόμενη λύση**

Από το παραλληλόγραμμο ΟF1FF2 έχουμε

 + = 180ο  άρα  = 180ο 63ο = 117ο = 

Η τρίτη γωνία του τριγώνου ΟF1F είναι F1O = 180o 117o 28o = 35o

Νόμος ημιτόνων στο τρίγωνο ΟF1F :  = 

(ημ117ο = ημ63ο, από παρ/κές γωνίες)  = 

  =  άρα ΟF1 = 6,44

Δηλαδή F1 = 6,44 Ν και ομοίως από το τρίγωνο OF2F βρίσκουμε ότι F2 = 5,27 N

**8.**

Ένας τοπογράφος, για να μετρήσει το

ύψος ενός ψηλού κτηρίου, τοποθέτησε το

γωνιόμετρο του στο σημείο Α και βρήκε

τη γωνία ΕΖ = 46ο . Στη συνέχεια

μετακινήθηκε κατά 30 m τοποθέτησε το

γωνιόμετρο στο σημείο Β και βρήκε

την γωνία ΕZ = 26ο . Ποιο ήταν

το ύψος του κτηρίου αν το γωνιόμετρο

 έχει ύψος 1,4 m ;

( Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες)

**Προτεινόμενη λύση**

Από τα δεδομένα έχουμε ότι ΔΕ = 180ο 46ο = 134ο

Τότε ΔΓ = 180ο 26ο – 134ο = 20ο

Νόμος ημιτόνων στο τρίγωνο ΔΓΕ :  =  άρα  = 

 = 

 ΔΕ = 63 m περίπου

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΖ έχουμε ημ26ο =  άρα 0,4384 = 

 ΕΖ = 27,6 m

Επομένως το ύψος του κτηρίου είναι h = ΕΖ + 1,4 = 27,6 + 1,4 = 29 m περίπου

**9.**

Να υπολογίσετε το x στις παρακάτω περιπτώσεις

δ)

γ)

β)

α)

x

5

12

13

2

3

4

x

3

0

o

x

7

5

3

7

x

3

2

45

o

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε x2 = (3)2 + 72 2⋅7⋅3συν45o =

 = 18 + 49 2⋅7⋅3 =

 = 25 άρα x = 5

**β)**

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε 72 = 32 + 52 2⋅5⋅3συνx

 49 = 9 + 25 30συνx

 30συνx = 15

 συνx = 

(αλλά συν120ο = συν60ο = ) συνx = συν120ο άρα  = 120ο

**γ)**

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε x2 = (2)2 + 42 2⋅4⋅2συν30o =

 = 12 + 16 2⋅4⋅2 =

 = 28 – 24

 = 4 άρα x = 2

**δ)**

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε 132 = 52 + 122 2⋅5⋅12συνx

 169 = 25 + 144 120συνx

 120συνx = 0

 συνx = 0 άρα  = 90ο

**10.**

Να υπολογίστε τις ίσες πλευρές β και γ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ , αν

= 120ο και α = 3.

**Προτεινόμενη λύση**

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε α2 = β2 + γ2 2⋅β⋅γ συν

 (3)2 = 2β2 2β2 συν120ο 

 27 = 2β2 2β2 (συν60ο )

 27 = 2β2 2β2

 27 = 3β2

 β2 = 9 άρα β = 3 επομένως και γ = 3

 Είναι συν120ο = συν60ο αφού 60o + 120ο = 180ο



**11.**

Σε κύκλο με ακτίνα R= 10 cm, η χορδή ΑΒ αντιστοιχεί

σε τόξο 120ο. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής .

**Προτεινόμενη λύση**

Προφανώς είναι  = 120ο .

 Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε ΑΒ2 = ΟΑ2 + ΟΒ2 2⋅ΟΑ⋅ΟΒ συν

 = 102 + 102 2⋅10⋅10 συν120ο = 

 = 100 + 100200(συν60ο ) =

 =200 200

 = 300

 άρα ΑΒ == =10 cm

 Είναι συν120ο = συν60ο αφού 60o + 120ο = 180ο

**12.**

Να υπολογίσετε τις διαγωνίους παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

με ΑΒ = 4 , ΒΓ = 3 και = 120ο .

**Προτεινόμενη λύση**

Από τον νόμο των συνημιτόνων

στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε

ΒΔ2 = ΑΔ2 + ΑΒ2 2⋅ΑΔ⋅ΑΒ συν =

 = 32 + 42 2⋅3⋅4 συν120ο = 

 = 9 + 16  24 (συν60ο) =

 = 2524 =

 = 25 + 12 =

 = 37 άρα ΒΔ = 

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι = 60ο και ομοίως βρίσκουμε ότι ΑΓ =

 Είναι συν120ο = συν60ο αφού 60o + 120ο = 180ο

****

**13.**

Μια τεχνική εταιρεία θέλει να καταθέσει

 μία προσφορά για την κατασκευή μιας

σήραγγας ΑΒ . Ένας μηχανικός της

εταιρείας με τους συνεργάτες του

έστησε ένα γωνιόμετρο στη θέση Μ

που η απόσταση του από το Α ήταν 100m

και από το Β ήταν 154 m .

Αφού μέτρηση την γωνία ΑΒ = 73ο

ισχυρίστηκε ότι με αυτά τα στοιχεία

μπορούσε να υπολογίσει το μήκος της σήραγγας .

 Είχε δίκαιο ; Πόσο ήταν τελικά το μήκος της σήραγγας ;

( Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες)

**Προτεινόμενη λύση**

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε ΑΒ2 = ΑΜ2 + ΜΒ2 2⋅ΑΜ⋅ΜΒ συν

 = 1002 + 1542 2⋅100⋅154 συν73ο

 = 10000 + 2371630800⋅0,2924 =

 = 24710 περίπου

 άρα ΑΒ = =157,2 m

Επομένως ο μηχανικός είχε δίκαιο

**14 .**

Ένας πυροσβεστήρας αυτόματης κατάσβεσης

πρόκειται να στηριχτεί πάνω από τον καυστήρα

ενός καλοριφέρ Ένας τεχνικός θέλει να

κατασκευάσει τη βάση στήριξής του και

διαθέτει τρείς μεταλλικές βέργες ΑΒ = 0,70m ,

 ΑΓ = 1,30 m και ΒΓ = 1,80m.

Για να κολλήσει όμως κατάλληλα τις

βέργες ΑΒ και ΑΓ, όπως φαίνεται στο

σχήμα πρέπει να γνωρίζει τη γωνία ω .

Μπορείτε εσείς να την υπολογίσετε ώστε

να βοηθήσετε τον τεχνικό

( Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες)

**Προτεινόμενη λύση**

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε ΒΓ2 = ΑΒ2 + ΑΓ2 2⋅ΑΒ⋅ΑΓ συνω

 1,82 = 0,72 + 1,32 2⋅0,7⋅1,3 συνω

 3,24 = 0,49 + 1,69 1,82 συνω

 συνω = 0,5824 =

 = συν54ο=

 = συν126ο άρα = 126ο

 **Διαθεματικό σχέδιο εργασίας**

 **Προσδιορισμός της απόστασης δύο απροσίτων σημείων**

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση των παρακάτω βουνοκορυφών Α

και Β



**Προτεινόμενη Λύση**

Στην βατή περιοχή επιλέγουμε δύο σημεία Γ και Δ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, των οποίων μετράμε την απόσταση. Έστω π.χ ότι ΓΔ = 30m



Με ένα γωνιόμετρο μετράμε τις γωνίες ΑΔ και ΑΓ.

Έστω ότι

ΑΔ = 77ο  και ΑΓ = 80ο

Τότε η τρίτη γωνία του τριγώνου ΑΔΓ είναι  = 180ο (77ο + 80ο) =

 = 180ο 157ο =

 = 23ο

Από τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε  = 

 = 

 απ’ όπου βρίσκουμε ότι ΑΔ = 74,8 m

Με ίδια διαδικασία υπολογίζουμε την απόσταση ΒΔ και με το γωνιόμετρο μετράμε την γωνία ΑΒ .

Έστω λοιπόν ότι ΒΔ = 100 m και ΑΒ = 60ο

Νόμος συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΒ : ΑΒ2 = ΑΔ2 + ΒΔ2 2ΑΔ⋅ΒΔ συν ΑΒ

 = 74,82 + 10022⋅74,8⋅100 συν60ο =

 = 5595,04 + 100002⋅74,8⋅100 ⋅=

 = 8115,04

 άρα ΑΒ =  90 m